20.03.14 (1) **Das diskrete Wahrscheinlichkeitsmodell (W-Modell)**

Wahrscheinlichkeit

Def.: Für eine abzählbare Menge Ω heißt eine Funktion $P: \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{Potenzmenge}} \to [0,1]$

Definition · Axiom: Normalisierung

W-Verteilung falls gilt: (N) $P(\Omega) = 1$ => Kolmogorov-Axiome

Axiom: Additivität

(A) $A \cap B = \emptyset$ = Disjunkt -> kein Element gemeinsam

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\quad (A,B \subseteq \Omega;$ d.h. $A, B \in \mathcal{P}(\Omega))$

Ω nennt man Ereignismenge und Teilmengen (A,B) dann Ereignisse.

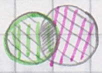
Bsp.: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$ mit $|A|$:= Anzahl der Elemente von $A \subseteq \Omega$ (beliebig)

a) $P(\emptyset) = 0$ $\quad$ b) $P(\{2,5,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Nachweis von (N) und (A): (N) $P(\Omega) = \frac{6}{6} = 1$ ✓

(A) $|A \cup B| = |A| + |B|$, falls $A \cap B = \emptyset$

$P(A \cup B) = \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$ ✓



Bem.: a) $P(A \cup B) = P(\underbrace{A \cup (B \setminus (A \cap B))}_{\text{disjunkte Zerlegung}}) \overset{(A)}{=} P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$

b) $P(\emptyset) = 0$ gilt immer => $\boxed{P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \underset{\emptyset \cap \emptyset = \emptyset}{\overset{(A)}{=}} P(\emptyset) + P(\emptyset)}$ => $P(\emptyset) = 0$

Def.: Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ mit $P(A) = 0$ bzw. 1 heißt unmöglich bzw. sicher. Ereignisse $\{\omega\}$ mit nur einem Element $\omega \in \Omega$ heißen Elementarereignisse. Die Fkt. $p(\omega) = P(\{\omega\})$ heißt W-Funktion oder auch Zähldichte.

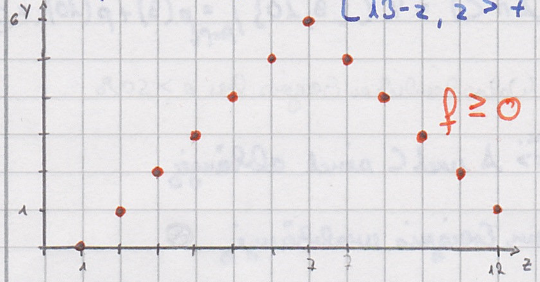
Einzelelemente von Ω (Omega) = ω (Omega)

Bem.: $\boxed{P(A) \overset{(A)}{=} \sum_{a \in A} p(a)}$

Bsp.: $P(\{1,2,3\}) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Bsp.: für eine W-Verteilung von Ω, die keine Gleichverteilung ist. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\dots,12\}$ $(\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{N}_{12})$

Hilfsfunktion: $f(z) = \begin{cases} z-1, & z \le 7 \\ 13-z, & z > 7 \end{cases}$ auf Ω.



$f \ge 0$

Def.: $p(z) = \frac{f(z)}{\sum_{z=1}^{12} f(z)} = \frac{f(z)}{36}$

$\boxed{\sum_{z=1}^{12} p(z) = 1}$

Diese Fkt. p definiert also eine W-Funktion $p: \Omega \to [0,1]$

← Zufallsvariable X "Groß X"

Def.: (wichtig!) Eine Fkt. $X: \Omega \to z$ nach einer (ganz) beliebigen Menge z heißt Zufallsvariable

Dabei ist Ω als Ereignismenge vorausgesetzt.

Bsp.: $\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$ (für zweifaches Würfeln) $\overset{\text{Def}}{=} \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}_6\} = \{(1,1),(1,2),\dots(1,6),(2,1),\dots\}$

$\Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = \underline{36}$

Funktion = ~~Augensumme~~ Zielmenge

$X(m,n) := m+n \in \mathbb{N}_{12} \; (= Z)$

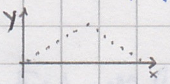
Def.: (wichtig!!) Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to Z$ wird auf Z eine (neue) W-Verteilung definiert durch $P_X(C) = \text{"}P\{X \in C\}\text{"} := P(\underbrace{X^{-1}}_{\text{Urbildmenge}}(C)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in C\})$. Sie heißt die <u>Verteilung von</u> X.

$X \hat{=}$ Abhängigkeit von Zufallsvariable

Bsp.: $X: \Omega \to \mathbb{N}_{12}$ wie oben, P = Gleichverteilung auf $\Omega = \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$, d.h. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36}$

$X(m,n) = m+n \Rightarrow P_X(C) \overset{\text{Def.}}{=} P\{X \in C\}$ bzw. $p_X(z) = P(\{(m,n) \in \Omega \mid m+n = C\})$, $z \in \mathbb{N}_{12} = Z$ ~~Zielbereich~~ = Zustandsmenge

Zahlenbeispiel: $p_X(1) = 0$; $p_X(2) = \frac{1}{36}$; $p_X(3) = \frac{2}{36}$ $[(1,2),(2,1)]$, …, $p_X(7) = \frac{6}{36} (= \frac{1}{6})$; $p_X(8) = \frac{5}{36}$

$p_X(12) = \frac{1}{36}$  $\Rightarrow p_X = \dot{p}: \mathbb{N}_{12} \to [0,1]$ wie heute Vormittag

Zahlenbeispiel: W dafür, dass mit zwei Würfeln die Summe 9 gewürfelt wird beträgt $p_X(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 \approx 11\,\%$ bzw. <u>mindestens</u> 9 gewürfelt wird $P_X(\{9,10,11,12\}) = p_X(9) + p_X(10) + p_X(11) + p_X(12)$

$= \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Bem: P_X ist tatsächlich eine W-Verteilung mit der Eigenschaft $P_X(C) = \sum_{x \in C} p_X(x)$, also p_X als zugehörige Dichtefunktion.

Def.: Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen <u>unabhängig</u>, wenn gilt $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ ⊛

Für ein Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$ (B „möglich") heißt $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. <u>Die W von $A \subseteq \Omega$ unter der Bedingung B</u>.

$P(A)$ unter der Bedingung B

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bem.: $P(A|B) = P(A)$ gilt genau dann, wenn A und B unabhängig sind.

Bsp.: P_X (statt P) wie im letzten Beispiel. $A := \{9,10,11,12\}$, $B := \{1,2,3\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ Disjunkt

$P(A \cap B) = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$ (analog: $P(B|A) = 0$) Wegen $P(A), P(B) \neq 0$ sind A, B <u>abhängig</u>

$C = \{8,9,10\} \Rightarrow A \cap C = \{9,10\} \Rightarrow P(A \cap C) = P(\{9,10\}) \underset{P = P_X}{=} p(9) + p(10) = \frac{7}{36}$

$\Rightarrow P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{7}{10} = 70\%$ Wahrscheinliches Ereignis bei $p > 50\%$

$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underset{33\%}{P(C)} \neq \underset{70\%}{P(C|A)} \overset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow} A$ und C sind abhängig

Bem: Jedes unmögliche Ereignis ist von jedem anderen Ereignis unabhängig ⊛

<u>„Vierfeldertafel"-Bsp:</u> Ω := Menge von Touristen; E := Menge derjenigen die Englisch können

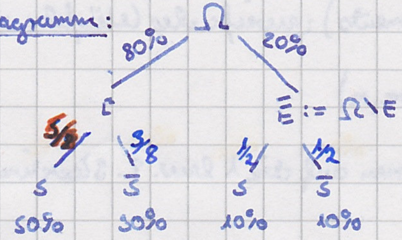
S := Menge derjenigen, die Spanisch können

Ω	E	$\bar{E}$	
S	50%	10%	60%
$\bar{S}$	30%	10%	40%
	80%	20%	

Umfrage: $P(E) = 80\%$, $P(S) = 60\%$, $P(E \cap S) = 50\%$

$P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{5}{8} = 62{,}5\% \neq P(S) = 60\% \to$ abhängig

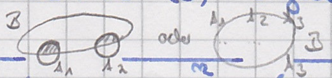
Baumdiagramm:



Bem dazu: Die bed. W kann also Faktor zwischen W en (als) angesehen werden, bei der die eine W durch Mengen-einschränkung aus der anderen hervorgeht:

$$\underbrace{P(E)}_{80\%} \cdot \underbrace{P(S|E)}_{5/8} = \underbrace{P(S \cap E)}_{50\%} \iff \boxed{P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)}}$$

Die Bayes-Formel: Für eine disjunkte Zerlegung $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ mit $P(A_j) > 0$ für $j = 1 \ldots n$ und ein $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$ gilt: $\boxed{P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j)}}$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$



$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) \overset{(A)}{=} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j)\right) = P(B)$$

Vereinigungssymbol

$$\overset{\text{Bayes}}{\iff} \underbrace{P(A_i | B) \cdot P(B)}_{P(A_i \cap B)} = \underbrace{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}_{P(A_i \cap B)}$$

Bsp.: Maschine M_i produziert $i \cdot 1000$ Bauteile ($i \in \mathbb{N}_3$) mit Ausschuss 4%, 2%, 4%. Mit welcher W stammt ein zufällig ausgewähltes Ausschussteil von Maschine 1. (M_1)?

ohne Bayes → $4\% \cdot \overset{M_1}{1000} = 40$; $2\% \cdot \overset{M_2}{2000} = 40$; $4\% \cdot \overset{M_3}{3000} = 120$ → Ausschuss gesamt $= 200$ → $p = \frac{40}{200} = 20\%$

mit Bayes: $\Omega :=$ Menge aller Bauteile mit $|\Omega| = 6000$; $M_i :=$ Menge der Bauteile der i-ten Maschine

$P :=$ Gleichverteilung auf Ω; $A :=$ Menge der Ausschussteile

Geg.: $P(A|M_1) = 4\%$, $P(A|M_2) = 2\%$, $P(A|M_3) = 4\%$

Ges.: $P(M_1 | A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(M_1) \cdot P(A|M_1)}{P(M_1)P(A|M_1) + P(M_2)P(A|M_2) + P(M_3)P(A|M_3)} = \frac{1/6 \cdot 4}{1/6 \cdot 4 + 2/6 \cdot 2 + 3/6 \cdot 4} = \underline{\underline{20\%}}$

$\frac{|M_1|}{|\Omega|} = \frac{1000}{6000}$ 4%

Def.: Abzählbar viele Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn für jede Indexmenge $\{j_1, \ldots, j_k\}$

also etwa $\{1,2\} = \{1,2,2\}$ ist ausgeschlossen, also K verschieden

$\subset \mathbb{N}$ (der Mächtigkeit K) gilt $\boxed{P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = \prod_{\ell=1}^{k} P(A_{j_\ell})}$

Bsp.: $\Omega := \mathbb{N}_6$; $A = B := \mathbb{N}_3$, $C = \{1, 4, 5, 6\}$. $P =$ Gleichverteilung → $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

denn die 1 ist in allen 3 drin

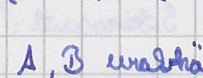
$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ aber noch nicht unabhängig, da "jede" → 1, (1,2) auch noch überprüfen

weitere Indexmenge $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}_3$, wenn $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ → Fazit: A, B, C sind abhängig

Falsche Vermutung: A, B unabhängig $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ↯ stimmt nicht ↯

Gegen-Bsp.:



$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} A, B$ unabhängig

Def.: Abzählbar viele Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \to Z_1$; $X_2 : \Omega \to Z_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn für alle $C_j \subseteq Z_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) die Ereignisse $\{\underbrace{X_j \in Z_j}_{A_j \text{ in obiger Def.}}\} = X_j^{-1}(C_j) \subseteq \Omega$ unabhängig sind.

Praktisches Bsp.: (eines mehrstufigen Zufallsexperiments): zweifaches Würfeln: $X_1 : \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6 \to$

$z := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$ mit $X := \overset{\text{identität}}{\mathrm{id}}$, d.h. $X(m,n) = (m,n)$

$X_1(m,n) := m$; $X_2(m,n) := n$ (als Projektionen auf die 1 bzw. 2. Koordinate), P als Gleichverteilung auf $\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$

Behauptung: X_1, X_2 sind unabhängig

Bem: Im Fall von abzählbaren Zustandsmengen $Z_1, Z_2, \ldots$ genügt es die Ereignisse $\{X_j = c_j\}$ $(c_j \in Z_j)$ zu betrachten. Hier gilt $Z_1 := Z_2 := \mathbb{N}_6$

Hier: Zahl von 1 bis 6

$\Rightarrow X_1^{-1}(c) = \{c\} \times \mathbb{N}_6$,

$X_2^{-1}(d) = \mathbb{N}_6 \times \{d\} \subseteq \Omega$

$\Rightarrow P\{X_1 = c\} = P(\{c\} \times \mathbb{N}_6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P\{X_2 = d\}$

$\Rightarrow P\{X_1 = c\} \cdot P\{X_2 = d\} = \frac{1}{36} = P\{X_1 = c, X_2 = d\}$ $\Rightarrow$ Beweis Ende $\square$

27.03.14 Beispiel eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit nicht-unabhängigen Projektionen X_n

suggestive Schreibweise Markov-Kette: erklärt an Kellerbeispiel 'Irrfahrt'

Bsp.: 

"Übergangswahrscheinlichkeiten" $q(j|i) = q(j|i)$ von i nach j für Zustände $i,j \in Z := \mathbb{N}_4$

? $\Rightarrow$ Zeilensummen der "stochastischen" Matrix $Q := (q(j|i))_{i,j \in \mathbb{N}_4}$ sind Eins: $\to$ laufenden Laufen von 1 bis 4

$\sum_{j=1}^{4} q(j|i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_4$

(Näheres zum Rechnen mit der "Übergangsmatrix" Q $\to$ in Stochastische Prozesse SP)

Zusammenhang mit W-Modell: Die Menge $Z^{\mathbb{N}_0} := \{(z_0, z_1, z_2, \ldots)\ z_n \in Z, n \in \mathbb{N}_0\}$ aller Folgen $\mathbb{N}_0 \to Z$ stellt die Menge aller "Irrpfade" dar, wobei der Index n einen diskreten Zeitpunkt darstellt; d.h. die „Koordinate" z_n zeigt an, dass zum Zeitpunkt n der Zustand z_n vorliegt. z.B.:

z.B.: $z_0 := 3$; $z_1 := 2$; $z_2 := 3$; $z_3 := 2$; $z_4 := 1$; $z_5 := 1, \ldots$ stellt ein möglichen Pfad der Zufallsvariablen $X_n(z_0, z_1, z_2, \ldots) := z_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ Interessant: $P\{X_n = 3\} = ?$

? Was ist hier das P? $p(z_0, z_1, \ldots) := p_0(z_0) \prod_{n=1}^{\infty} q(z_n | z_{n-1})$ zu vorgegebenen $p_0 : Z \to [0,1]^{\mathbb{N}_4}$ ("Startverteilung")

$(\Rightarrow P\{X_n \in \overset{\text{Teilmenge der Zustandsmenge}}{C}\} = \underbrace{\sum_{c \in C} P\{X_n = c\}}_{\text{P von allen Folgen, wenn die n-te Komponente = c ist}} = \sum_{c \in C} \sum_{z_n = c} \underbrace{p(z_0, z_1, \ldots)}$ $\to$ in der Regel nicht interessant, sondern das „asymptotische Verhalten" $\to$ SP